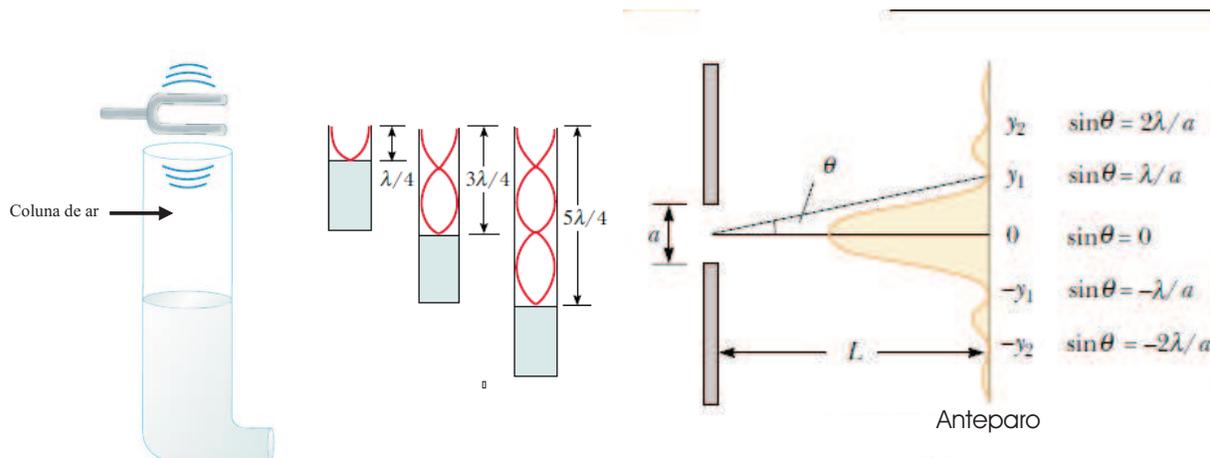


# FÍSICA EXPERIMENTAL III/XIX



LABORATÓRIO DIDÁTICO



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Universidade Federal Fluminense

Niterói/RJ - BRASIL  
MARÇO DE 2010.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>REVISÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Princípio de Arquimedes</b>	<b>2</b>
2.1	Objetivo . . . . .	2
2.2	Material utilizado . . . . .	2
2.3	Teoria . . . . .	2
2.4	Procedimento experimental . . . . .	2
2.4.1	Utilizando um dinamômetro . . . . .	2
2.4.2	Utilizando uma balança . . . . .	2
2.5	Folha de manipulação - Arquimedes . . . . .	3
2.5.1	Dados Experimentais . . . . .	3
2.5.2	Análise dos Dados Experimentais . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Flutuação</b>	<b>4</b>
3.1	Objetivo . . . . .	4
3.2	Material utilizado . . . . .	4
3.3	Procedimento . . . . .	4
3.4	Teoria . . . . .	4
3.5	Folha de manipulação - Flutuação . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Experiências Demonstrativas: Equação de Bernoulli</b>	<b>6</b>
4.1	Objetivo . . . . .	6
4.2	Material utilizado . . . . .	6
4.3	Teoria . . . . .	6
4.4	Procedimento experimental: Equação de Bernoulli . . . . .	6
4.5	Folha de Manipulação : Equação de Bernoulli . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Transformação de um gás a Temperatura Constante</b>	<b>8</b>
5.1	Objetivo . . . . .	8
5.2	Material utilizado . . . . .	8
5.3	Teoria . . . . .	8
5.4	Procedimento experimental . . . . .	8
5.5	Folha de Manipulação : Transformação de um gás a Temperatura Constante . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Equivalente Mecânico da Caloria</b>	<b>10</b>
6.1	Objetivo . . . . .	10
6.2	Material utilizado . . . . .	10
6.3	Teoria . . . . .	10
6.4	Procedimento experimental : Equival. Mec. da Caloria . . . . .	12

<b>7 Ondas Estacionárias em Cordas</b>	<b>13</b>
7.1 Objetivo . . . . .	13
7.2 Material utilizado . . . . .	13
7.3 Teoria . . . . .	13
7.4 Procedimento experimental . . . . .	13
7.5 Folha de manipulação - Ondas Estacionárias . . . . .	14
<b>8 Velocidade do Som Usando o Tubo de Kundt</b>	<b>15</b>
8.1 Objetivo . . . . .	15
8.2 Material utilizado . . . . .	15
8.3 Teoria . . . . .	15
8.4 Folha de manipulação : Velocidade do Som usando um Tubo de Kundt. . . . .	16
8.5 Procedimento experimental . . . . .	16
<b>9 Reflexão e refração da luz</b>	<b>17</b>
9.1 Objetivo . . . . .	17
9.2 Material utilizado . . . . .	17
9.3 Teoria . . . . .	17
9.4 Procedimento experimental - Leis da Reflexão e Refração . . . . .	18
<b>10 Interferência e Difração</b>	<b>20</b>
10.1 Objetivo . . . . .	20
10.2 Material utilizado . . . . .	20
10.3 Teoria . . . . .	20
10.4 Procedimento Experimental: Interferência e Difração . . . . .	23
<b>11 APÊNDICE I: Propagação de Erros</b>	<b>25</b>
11.1 Algarismos Significativos . . . . .	25
11.2 Notação científica . . . . .	25
11.3 Transformações de unidades . . . . .	25
11.4 Arredondamentos . . . . .	25
11.5 Operações com algarismos significativos . . . . .	26
11.5.1 Adição e Subtração . . . . .	26
11.5.2 Multiplicação e divisão . . . . .	26
11.5.3 Funções transcendentais . . . . .	26
<b>12 Introdução à Teoria de Erros</b>	<b>26</b>
12.1 Incerteza (ou erro) . . . . .	26
12.2 Classificação dos erros . . . . .	26
12.3 Estimativa de incertezas . . . . .	27
12.4 <b>Propagação de Erros</b> . . . . .	28
12.5 Soma (Subtração ) por uma constante . . . . .	28
12.6 Produto por uma constante . . . . .	28
12.7 Produto de 2 variáveis . . . . .	29
12.8 Potência . . . . .	29
12.9 Exponencial . . . . .	29

12.10	Logaritmo . . . . .	29
12.11	Cosseno . . . . .	29
12.12	Tabela de propagação de erros . . . . .	29
<b>13</b>	<b>APÊNDICE II: Método dos Mínimos Quadrados</b>	<b>31</b>
13.1	Construção de gráficos . . . . .	31
<b>14</b>	<b>Análise de gráficos: ajuste linear</b>	<b>32</b>

# 1 REVISÃO

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

1. Calcule  $\Delta f$  em termos de  $\sigma_{x_1}$  e  $\sigma_{x_2}$  para cada um dos casos mostrados abaixo.
2. Soma:  $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes .
3. Subtração:  $f(x_1, x_2) = ax_1 - bx_2$ .
4. Divisão:  $f(x_1, x_2) = \frac{ax_1}{bx_2}$ .
5. Potenciação:  $f(x_1) = ax_1^n$ , onde  $n$  é um número natural.
6. Utilizando o paquímetro, meça a altura e o diâmetro do cilindro que será utilizado na experiência sobre o Princípio de Arquimedes,

$$h = \dots \pm \dots$$

$$d = \dots \pm \dots$$

Calcule o volume do cilindro e escreva o resultado como:

$$V = \dots \pm \dots$$

7. Foi feita uma experiência em que se determinou a força magnética sobre um fio percorrido por uma corrente de  $I = 5$  A em função do seu comprimento. Os dados estão na tabela abaixo.

$n$	$L(\text{mm})$	$F$ (mN)	$X^2$	$XY$	$(a + bX)$
1	25,0	8,0			
2	50,0	14,0			
3	100,0	26,2			
4	200	53,6			
$\Sigma$					

8. Faça um gráfico de força ( $F$ ) versus comprimento ( $L$ ). Pela forma do gráfico obtido, que relação existe entre  $F$  e  $L$ ?
9. Utilizando o método dos mínimos quadrados (consultar apêndice II da apostila), obtenha a reta que melhor ajusta os dados. Em seguida, trace-a no gráfico.

## 2 Princípio de Arquimedes

### 2.1 Objetivo

Determinar experimentalmente o empuxo de um fluido sobre um corpo submerso.

### 2.2 Material utilizado

- Béquer;
- Dinamômetro;
- Paquímetro;
- Balança ;
- Cilindros metálicos (alumínio e material misto);
- Corpo sólido com forma irregular;

### 2.3 Teoria

O princípio de Arquimedes, que é uma consequência das leis da estática dos fluidos, diz que quando um corpo é total ou parcialmente mergulhado em um fluido (líquido ou gás) em equilíbrio, o fluido exerce pressão em todos os pontos da superfície do corpo que estejam em contato com ele. A pressão é maior nas partes imersas mais profundas. A resultante de todas as forças devidas as pressões é uma força vertical, dirigida para cima, denominada de **empuxo** do fluido sobre o corpo imerso.

ATENÇÃO  $\implies$  Sabendo que o empuxo é igual ao peso do volume de líquido deslocado, obtenha uma expressão envolvendo o Empuxo ( $E$ ) e o volume do sólido mergulhado no fluido ( $V$ ).

### 2.4 Procedimento experimental

Neste experimento o empuxo será determinado utilizando dois procedimentos experimentais diferentes.

#### 2.4.1 Utilizando um dinamômetro

Neste primeiro procedimento, são realizadas duas medidas de força com a utilização de um dinamômetro (veja a Figura 1). Primeiramente, mede-se o peso de um corpo, como mostra a Figura 1.(a). A seguir, determina-se o peso aparente do objeto, após este estar totalmente submerso em água. A diferença entre essas duas medidas é o empuxo exercido sobre o objeto. **Atenção :  $\implies$  Não deixe a parte interior do dinamômetro molhar.**

#### 2.4.2 Utilizando uma balança

Inicialmente determina-se, com a utilização de uma balança , a massa de um béquer contendo água, conforme mostra a Figura 2.(a). A seguir, determina-se a massa aparente do béquer com água ao mergulhar totalmente um objeto nele, como mostra a Figura 2.(b). As massas obtidas podem ser utilizadas para determinar o peso real e o peso aparente do béquer com água, cuja diferença é igual ao empuxo.

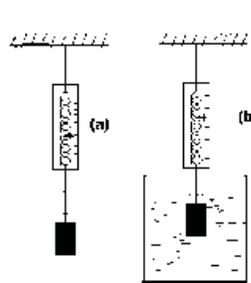


Figura 1

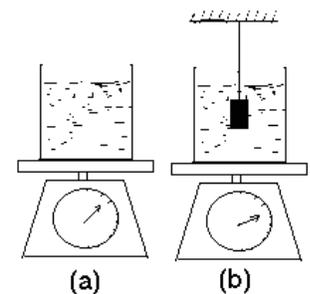


Figura 2

Obs: A condução do experimento será feita de acordo com os passos listados na folha de manipulação .

## 2.5 Folha de manipulação - Arquimedes

Data: ..... Turma: .....

Grupo

Nome: .....

Nome: .....

Nome: .....

Nome: .....

### 2.5.1 Dados Experimentais

- Utilizando um dinamômetro, meça o peso  $P$  do cilindro de alumínio. Em seguida, coloque o cilindro de alumínio preso ao dinamômetro e mergulhe o cilindro totalmente na água. Meça novamente o peso do cilindro (agora peso aparente  $P_{ap}$ ). **Atenção :**  $\Rightarrow$  Não deixe a parte interior do dinamômetro molhar!

$\Rightarrow$  Estimem as margens de erro de suas medidas!

$$P = \dots \pm \dots$$

$$P_{ap} = \dots \pm \dots$$

- Utilizando o paquímetro, meça a altura e o diâmetro do cilindro utilizado no procedimento anterior,

$$h = \dots \pm \dots$$

$$d = \dots \pm \dots$$

- Meça , utilizando uma balança , a massa  $M$  do béquer com água. A seguir coloque o cilindro de alumínio suspenso e totalmente imerso na água e meça a massa aparente  $M_{ap}$  do béquer.

$$M = \dots \pm \dots \quad M_{ap} = \dots \pm \dots$$

### 2.5.2 Análise dos Dados Experimentais

**Atenção :**  $\Rightarrow$  Não esqueça da propagação de erros.

- Conhecendo o peso dos cilindros dentro e fora da água, calcule o empuxo no cilindro de alumínio.

$$E_1 = \dots \pm \dots$$

- Obtenha o volume dos cilindros e calcule o empuxo utilizando a expressão obtida na seção 'Teoria'. Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  (aceleração da gravidade) e  $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3 (= 10^3 \text{ Kg/m}^3)$  (densidade da água). Compare com o resultado experimental do item anterior (saiba que  $1 \text{ N} = \text{kg.m/s}^2$ ). Quais as possíveis fontes de discrepância?

$$V = \dots \pm \dots$$

$$E_2 = \dots \pm \dots$$

- Se ao invés de alumínio fosse utilizado um material diferente (*e.g.* material misto), mas conservando a mesma geometria, o resultado seria diferente? Justifique.
- O peso do *béquer* com água aumentou ou diminuiu após mergulhar o cilindro? Justifique qualitativamente.
- Obtenha uma expressão teórica que relaciona  $\Delta M$  e  $E$ , onde  $\Delta M = M_{ap} - M$  e  $E$  é o empuxo. Obtenha o valor experimental do empuxo utilizando este método ( $E_3$ ). Compare o valor teórico ( $E_2$ ) com o experimental ( $E_3$ ).

$$E_3 = \dots \pm \dots$$

- (a) Agora que você verificou a validade da expressão teórica acima para o empuxo, utilize-a junto com a técnica experimental acima mais precisa para determinar o volume de um objeto de geometria irregular. (b) Meça a massa do objeto; (c) obtenha então sua densidade.

$$V_O = \dots \pm \dots$$

$$M_O = \dots \pm \dots$$

$$\rho_O = \dots \pm \dots$$

### 3 Flutuação

#### 3.1 Objetivo

Analisar experimentalmente a flutuação de um corpo em diferentes líquidos, medindo a densidade do líquido.

#### 3.2 Material utilizado

- Béquero de 1000 ml;
- proveta graduada;
- copo cilíndrico de PVC;
- copo com areia e copinho de café;
- béquer de 250 ml;
- balança ;

#### 3.3 Procedimento

Nosso objetivo é relacionar experimentalmente a altura submersa  $h$  com a massa  $m$  de um corpo flutuante cilíndrico, veja a Figura 1. A variação da massa do corpo cilíndrico é feita colocando diferentes quantidades de areia no seu interior (cilindro de PVC), o qual é colocado a flutuar em água em um béquer de 1000 ml. É importante observar que o equilíbrio do

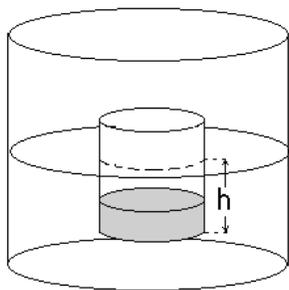


Figura 1: Cilindro com areia flutuando em água, com profundidade mergulhada igual a  $h$ .

cilindro é imprescindível para realizar medidas precisas da altura submersa  $h$ . O equilíbrio,

com o eixo do cilindro na posição vertical, deverá ser obtido por meio da distribuição mais uniforme possível da areia no fundo deste corpo flutuante. Obtenha, portanto, pares  $h$ - $m$  no caso em que o líquido é água.

#### 3.4 Teoria

Para discutirmos teoricamente o sistema da Figura 1, precisamos considerar dois fatos fundamentais:

1. O corpo flutuante está em equilíbrio, portanto a força resultante é nula.
2. São duas as forças agindo sobre o corpo flutuante: o peso e o empuxo.

**Desenvolvimento**  $\implies$  Sabendo que o módulo da força peso deverá ser igual ao módulo do empuxo, obtenha, utilizando o Princípio de Arquimedes, uma relação entre a altura submersa  $h$  e a massa  $m$  do corpo flutuante. Veja Figura 1.

### 3.5 Folha de manipulação - Flutuação

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

1. Acrescente pouco a pouco areia no interior do copo cilíndrico, colocando-o para flutuar em um béquer contendo água, medindo a cada vez a massa total  $m$  do corpo flutuante e a altura submersa  $h$ . Preencha a Tabela I abaixo.
2. Meça o diâmetro externo do cilindro de PVC.

3. Construa em um papel milimetrado o gráfico  $h$  vs.  $m$ .

4. (a) Pela forma do gráfico obtido, que relação existe entre  $h$  e  $m$ ? (b) Expresse essa relação matematicamente.

5. Utilizando a lei do empuxo para corpos flutuantes, demonstre que, para um corpo de seção reta constante de área  $A$  (como é o caso do copo de areia), vale a relação

$$h = \frac{1}{\rho_{Liq}A}m,$$

onde  $\rho_{Liq}$  é a densidade do líquido).

6. Usando um paquímetro, determine a área  $A$  da seção transversal do copo de areia,

$$A = \dots \pm \dots$$

7. Utilizando o método dos mínimos quadrados (consulte o apêndice II), obtenha a reta que melhor ajusta a estes dados ( $Y' = a + bX$ ). Em seguida, trace-a qualitativamente no gráfico.

8. Determine, a partir dos resultados anteriores, a relação entre  $\rho_{agua} =$  e os coeficientes  $a, b$  (obtidos pelo MMQ) e  $A$ , com isso calcule a densidade da água. Compare com o valor tabelado ( $1 \text{ g/cm}^3$ ).

$$\rho_{agua} = \dots \pm \dots$$

9. Suponha que se substitua a água por outro líquido de menor densidade. A reta que seria obtida teria menor ou maior inclinação que a da água? Justifique.

10. Demonstre experimentalmente que a massa do corpo flutuante é igual a massa de água deslocada.

Tabela 1: Dados experimentais de  $h$  e  $m$ .

$i$	$m$ (g)	$h$ (cm)	$X^2$	$XY$	$a + b \times X$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						$a = \dots \pm \dots$
4						
5						$b = \dots \pm \dots$
6						
$\Sigma_{i=1}^N$						

## 4 Experiências Demonstrativas: Equação de Bernoulli

### EXPERIÊNCIA I

#### 4.1 Objetivo

Verificar experimentalmente a validade da equação de Bernoulli.

#### 4.2 Material utilizado

Uma garrafa PET cilíndrica sem tampa e com um furo lateral, uma régua, água e uma cuba.

#### 4.3 Teoria

Na figura abaixo é mostrada a montagem experimental utilizada, ou seja, uma garrafa PET modificada, com furo lateral por onde flui a água.

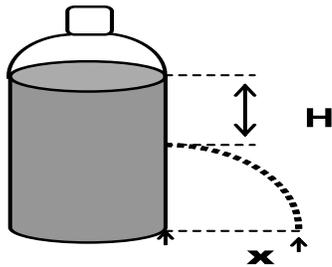


Figura 2: Esquema experimental da experiência I.

O alcance horizontal  $X$  do jato de água parabólico pode ser medido em nível abaixo do fundo da garrafa, com o auxílio de uma régua horizontal. O valor de  $X$  é proporcional à velocidade horizontal  $v$  do jato de água ao sair da garrafa, como em um movimento de lançamento de projéteis. Mais precisamente:

$$X^2 = \frac{2Y}{g}v^2, \quad (1)$$

onde  $Y$  é o desnível entre o furo e a régua.

Usando a equação de Bernoulli, temos:

$$p_0 + \rho gH = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gH_0, \quad (2)$$

quando aplicada a dois pontos, um no nível superior da água (lado esquerdo da equação ) e o outro na saída do jato (lado direito da equação ), onde  $\rho$  é a densidade da água e  $p_0$  é a pressão atmosférica. Observe que tomamos o cuidado adicional de introduzir uma pressão extra  $\rho gH_0$  desconhecida no lado direito da equação 2. Esta representa a resistência oferecida pelo pequeno furo na garrafa à passagem da água, devido a tensão superficial.  $H_0$  é um parâmetro a ser determinado.

Juntando as duas equações , temos:

$$X^2 = 4Y(H - H_0). \quad (3)$$

#### 4.4 Procedimento experimental: Equação de Bernoulli

1. Meça sucessivos valores de  $H$  enquanto a água flui através da garrafa, e os respectivos valores  $X$ . Repita as medidas pelo menos três vezes.
2. Construa o gráfico de  $X^2$  versus  $H$ , que deve resultar em uma reta (o que comprova experimentalmente a validade da equação de Bernoulli). Determine através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) os valores dos coeficientes linear e angular da reta que melhor se ajusta ao dados experimentais. Determine os valores de  $Y$  e  $H_0$  usando o MMQ.
3. Compare o valor de  $H_0$  como valor da altura da pequena coluna de água restante na garrafa, após todo escoamento, acima do nível do furo. O que você pode dizer sobre isso?

#### 4.5 Folha de Manipulação : Equação de Bernoulli

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

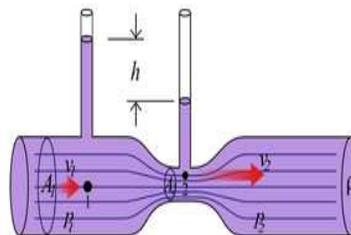


Figura 3: Ilustração do medido de Venturi.

Tabela 2: Dados Exp. de  $H$  vs  $X^2$ .

$X \pm \Delta X$	$X^2 \pm \Delta X^2$	$H \pm \Delta H$

Oberve a experiência realizada no laboratório e com base nos resultados experimentais discuta a validade das propriedades (a), (b) e (c) acima consideradas para o sistemas.

#### EXPERIÊNCIA II: Medidor de Venturi

A Figura abaixo mostra um medidor de Venturi que é um instrumento usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido em um tubo. Visando uma abordagem teórica mais simples desse sistema normalmente são feitas as seguintes considerações :

- (a) Escoamento estacionário;
- (b) Fluido incompressível;
- (c) Atrito interno desprezível;

Fazendo uso dessas considerações , deduza uma expressão para a velocidade de escoamento  $v_1$  em termos da áreas das seções retas  $A_1$  e  $A_2$  e da diferença de altura  $h$  entre os níveis dos líquidos nos dois tubos verticais.

## 5 Transformação de um gás a Temperatura Constante

### 5.1 Objetivo

Estudar o comportamento de um gás variando o volume e pressão, mantendo-se constante sua temperatura.

### 5.2 Material utilizado

- Manômetro
- Seringas com escala em mililitros

### 5.3 Teoria

Boyle e Mariotte estudaram o comportamento estático de gases submetidos a variações de pressão e volume, mantendo suas temperaturas constantes. Suas conclusões formam a bem conhecida Lei de Boyle-Mariotte: *sob temperatura constante, o volume ocupado por uma certa massa de gás é inversamente proporcional à pressão a qual o gás está submetido*, isto é, o produto da pressão com o volume em qualquer estado do gás é uma constante,  $pV = cte$ ,

onde  $p$  e  $V$  são, respectivamente, a pressão à qual o gás está submetido e o seu volume. Se representarmos por índices 1, 2, 3, ...,  $n$ , os estados do gás, tem-se:

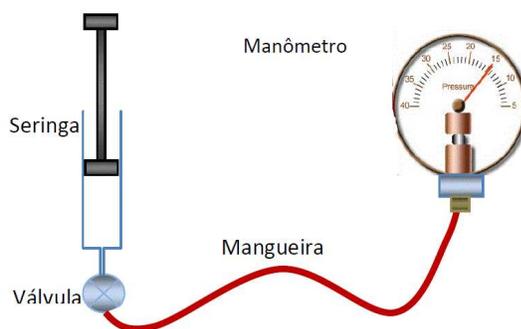
$$p_1V_1 = p_2V_2 = p_3V_3 = \dots = p_nV_n = cte \quad (4)$$

A relação acima é válida rigorosamente para gases ideais, mas como devemos provar nesta experiência, pode ser usada aproximadamente para gases reais, como é o caso do ar nas condições de temperatura e pressão do laboratório.

### 5.4 Procedimento experimental

O gás utilizado nesse procedimento experimental será o ar pois seu comportamento está bem próximo do de um gás ideal. Com o parafuso conectado à seringa com êmbolo móvel varie gradualmente o volume do gás confinado nela. A medição da variação do volume é feita através da graduação existente na parede da seringa. A partir do manômetro pode-se verificar a variação de pressão em relação à pressão atmosférica.

Figura 4: Esquema Experimental



**5.5 Folha de Manipulação :  
Transformação de um gás a Temperatura Constante**

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

1. Abra a válvula do manômetro e eleve o êmbolo da seringa até que seja alcançado o volume inicial de 5 ml. Logo em seguida, feche a válvula de modo que o ar no interior da seringa e da mangueira fique confinado. Verifique se não há vazamento de ar. Para tal procedimento, comprima o ar no interior da seringa e anote o valor da pressão. Se há diminuição da pressão, isto significa que há vazamento. No entanto, pequenos vazamentos podem ser desprezados se eles são suficientemente pequenos desde que a sequência de medidas não dure muito tempo.
2. Agora que você verificou que não há vazamentos que possam prejudicar o procedimento experimental, desloque o êmbolo comprimindo o ar de modo que a diferença de nível de volume diminua em intervalos regulares (Volume na seringa,  $V_S$ ). Complete a Tabela 3 sabendo que:  $p = p_{man} + p_0$ ,  $p_{man}$  é a pressão aferida no manômetro e  $p_0$  é a pressão atmosférica quando a válvula está aberta. Considere  $p_0 = 760$  mmHg.
3. O que você conclui observando os valores de  $pV_S$ ? Atenção : Observe que os valores de  $V_S$  na tabela acima não corresponde ao volume total de ar no sistema.
4. Faça o gráfico  $V_S$  vs  $1/P$  e procure interpretar a curva obtida. Por que é esperado que essa curva seja uma reta?

5. Utilize um termômetro para medir a temperatura ambiente do ar, expressando seu valor em Kelvin:

$$T = \dots \pm \dots \quad (5)$$

6. Utilizando o método dos mínimos quadrados, obtenha os coeficientes angular e linear da reta que se ajusta ao dados de  $V_S$  em função de  $1/p$ . A partir de um desses coeficientes e da temperatura ambiente do ar, determine a massa, em gramas, do ar confinado na mangueira e na seringa. Dados: Massa molar do ar = 28,8 g / mol,  $R = 8,31$  J / mol K.
7. Utilize os valores obtidos acima para estimar a densidade do ar no laboratório,

$$\rho = \dots \pm \dots \quad (6)$$

Tabela 3: Dados Exp. de  $p$  vs  $1/V_S$ .

$V \pm \Delta V_S$	$p \pm \Delta p$	$1/P \pm \Delta(1/P)$	$pV_S \pm \Delta(pV_S)$

## 6 Equivalente Mecânico da Caloria

### 6.1 Objetivo

Determinar experimentalmente a equivalência Joule-Caloria.

### 6.2 Material utilizado

- Calorímetro (Phywe)
- Béquer de 500 ml
- Balança
- Água gelada ( 15<sup>o</sup> C)
- Fonte de tensão (Phywe)
- termômetro (0-50<sup>o</sup>C)
- Cronômetro digital
- Voltímetro e Amperímetro

### 6.3 Teoria

Quando um sistema termodinâmico se encontra isolado, sua evolução em direção ao equilíbrio térmico ocorrerá através de transferência de calor apenas entre as diferentes partes do sistema. Dessa forma, o balanço de energia após todas as trocas de calor  $Q_i$  em um sistema composto de  $n$  partes implicará em  $\sum_1^n Q_i = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 0$ . Portanto, se um corpo quente é colocado num em contato térmico com água fria, sabemos que o corpo resfria e a água aquece, até que ambos atinjam a mesma temperatura. Dizemos que isto é resultado da transferência de energia do corpo para a água. Assim podemos definir calor como sendo a energia transferida entre sistemas com temperaturas diferentes e sua unidade conhecida como caloria. Uma caloria é definida como a energia necessária para elevar a temperatura de 1g de água entre as temperaturas 14,5<sup>o</sup>C e 15,5<sup>o</sup>C, pois nesse intervalo de temperatura o calor específico da água se mantém praticamente constante. Durante

o século XIX a identificação do calor como uma forma de energia levou à procura de uma relação entre a caloria e a unidade mecânica de energia, que é o Joule no SI, ou seja, procurou-se determinar o valor da razão conhecida como equivalente mecânico do calor ou constante de Joule  $Z$ . Essa razão é expressa pela equação :

$$Z = \frac{W}{Q} \quad (7)$$

Em 1868 Joule determinou experimentalmente o equivalente mecânico de calor empregando um dispositivo mecânico contendo paletas. As paletas foram submersas em água num calorímetro e colocadas em movimento por pesos. Calculando o trabalho mecânico e a variação de temperatura da água, Joule determinou a constante  $Z$ . A constante  $Z$  depende do sistema de unidade. Se o trabalho ( $W$ ) for medido em Joules e a quantidade de calor ( $Q$ ) for medida em calorias, temos que:  $Z = 4,18$  Joule/cal.

O valor de  $Z$  atualmente aceito é  $Z = 4,1868$  J/Cal.

Imagine o caso onde o trabalho é fornecido por uma resistência elétrica de acordo com a montagem mostrada na Figura 5. Neste caso, a energia transferida para a água eleva a temperatura inicial  $T_i$  para um valor final  $T_f$  e a quantidade de calor recebida pelo sistema é dada por:

$$Q = (m_a c + C_{cal})(T_f - T_i), \quad (8)$$

onde  $m_a$  é a massa da água em [gramas],  $C_{cal}$  é a capacidade térmica do calorímetro em [cal/<sup>o</sup>C] e  $c$  é o calor específico da água (1 cal/g<sup>o</sup>C). Já a potência (dissipada pela resistência, desconsiderando as perdas resistivas dos fios e contatos e considerando os valores rms, é:

$$P = VI, \quad (9)$$

onde  $V$  é a diferença de potencial entre os terminais da resistência (aquecedor) em [Volts] e  $I$  é a corrente que passa pela resistência (aquecedor) em [Ampères]. OBS: os instrumentos

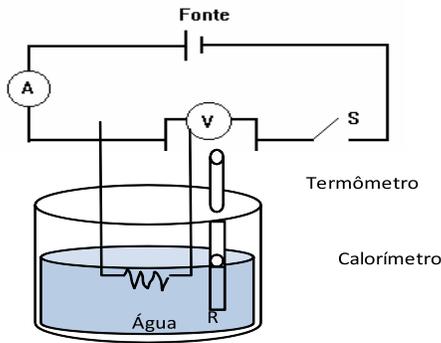


Figura 5: Esquema de uma montagem experimental para determinar o equivalente mecânico em calor. A fonte de corrente alternada fornece uma corrente  $I_{rms}$  ao circuito ligado em série a uma resistência  $R$ ,  $V_{rms}$  é a queda de tensão nos terminais da resistência. Com o aquecimento da resistência a água se aquece.

amperímetro e voltímetro fornecem os valores rms da corrente e tensão respectivamente.

Assim, o trabalho realizado pela corrente elétrica, num intervalo de tempo  $\Delta t$ , :

$$W = P\Delta t. \quad (10)$$

Portanto, neste caso, a razão  $Z$  será:

$$Z = \frac{W}{Q} = \frac{VI\Delta t}{[(m_a c + C_{cal})\Delta T]} \quad (11)$$

E deve resultar no valor 4,1868 J/Cal .

Onde

$V$  = diferença de potencial sobre a resistência (aquecedor) em [Volts].

$I$  = Corrente que passa pela resistência (aquecedor) em [Ampères].

$\Delta t$  = tempo de passagem de corrente em [segundos].

$m_a$  = massa da água adicionada ao calorímetro.

$C_{cal}$  = capacidade térmica do calorímetro em [cal/ $^{\circ}$ C]

$\Delta T$  = variação de temperatura em [Celsius].

Portanto na experiência que será realizada no laboratório precisa-se determinar a massa da água que será inserida no calorímetro. Depois é fornecida uma quantidade conhecida de energia para aquecer a água. Sabendo a energia fornecida e a variação de temperatura causada determina-se o equivalente mecânico da calor. A seguir é oferecida uma sequência de procedimentos para atingir esses objetivos, mas os alunos podem fazer como desejarem.

**6.4 Procedimento experimental :  
Equival. Mec. da Caloria**

Data: ..... Turma:.....  
 Grupo  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....

**Atenção : Jamais ligue o aquecedor fora d'água. Isso danificará o aparelho.**

OBS: O circuito da Figura 5 já está montado. Verifique se está tudo ligado corretamente! Caso não estejam disponíveis o amperímetro e voltímetro signifique que a corrente que vai passar pelo aquecedor (resistência) e a ddp entre os seus terminais já foram determinadas previamente.

1. Pegue um béquer com capacidade maior de que 300 ml e meça a sua massa.

$$m_{BequerVazio} = \dots \pm \dots$$

2. Insira no béquer acima uma quantidade de água de aproximadamente de 300 ml. Meça a massa do béquer com água e determine a massa da água que será inserida no calorímetro.

$$m_{Bequer\ c\ agua} = \dots \pm \dots$$

$$M_{agua} = m_a = \dots \pm \dots$$

3. Insira a água no calorímetro (massa  $m_a$ ). Faça movimentos com o termalizador e espere aproximadamente 1,5 minutos e meça com o termômetro a temperatura de equilíbrio no calorímetro.

Tabela 4: Equivalência Mec. da Caloria

$T(^{\circ}C)$	$\Delta T = T - T_i(^{\circ}C)$	Q (Cal)	Tempo (s)	Tempo Total(s)	W(J)

$$T_i = \dots \pm \dots$$

- Somente pode-se acionar a fonte quando o resistor estiver totalmente submerso na água.
- Os estudantes não podem manusear o termômetro. Isto será feito pelo Professor.
- O circuito deve ser ligado à fonte com 8V AC.

**Determinação da razão Z.  
Constantes fornecidas**

- $V = ( 7,75 \ 0,05 )$ (Volts).
- $I = ( 3,35 \ 0,05 )$ (Ampres).
- $C_{cal} = ( 16,5 \ 0,5 )$ (Cal/0C).

4. Acione o circuito por 3 minutos (180 s), desligue a fonte, agite o termalizador acompanhe a temperatura registrada pelo termômetro. A temperatura de equilíbrio  $T$  será a temperatura máxima que for atingida pelo sistema. Repita esse procedimento 5 vezes e preencha a tabela abaixo.
5. Faça um gráfico de  $W$  versus  $Q$  e através do método dos mínimos quadrados ( $y' = a + bx$ ) determine o valor da constante (razão)  $Z$  e a sua respectiva incerteza (veja a equação 11 acima). Compare o valor encontrado com o valor atualmente aceito  $Z = 4,1868$  J/Cal (determinado pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas).

## 7 Ondas Estacionárias em Cordas

### 7.1 Objetivo

Estudar a formação de ondas estacionárias transversais em uma corda e determinar as frequências de ressonâncias correspondentes aos quatro primeiros harmônicos.

### 7.2 Material utilizado

⊗ Gerador de sinais; ⊗ Alto falante; ⊗ Fios de conexão ; ⊗ Pesos; ⊗ Régua graduada e uma trena; ⊗ Suporte com garras; ⊗ Barbante (ou outro fio com densidade linear conhecida).

### 7.3 Teoria

Ondas a propagarem-se num espaço confinado, como por exemplo, as ondas numa corda de piano ou guitarra, sofrem reflexões em ambas as extremidades da corda. Assim, formam-se ondas que se movimentam na mesma direção e em sentidos opostos. Estas ondas combinam-se de acordo com o princípio da superposição . Para cada corda, existem frequências (chamadas de frequências de ressonância) nas quais a sobreposição conduz a uma configuração de vibração estacionária, denominada onda estacionária.

Uma corda (ou fio), fixa em suas extremidades, entra em ressonância nas seguintes frequências:

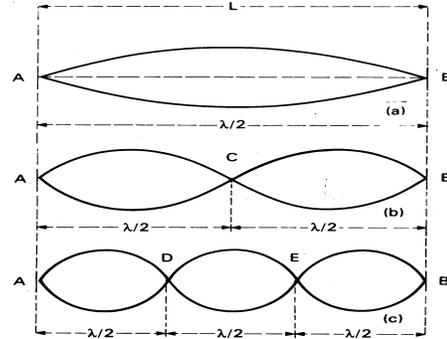
$$f_n = \frac{v}{2L}n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (12)$$

onde  $n$  é o número do harmônico [adimensional];  $L$  é o comprimento da corda e  $v$  é a velocidade das ondas transversais na corda (fio), cuja superposição deu origem à onda estacionária. A velocidade  $v$ , que é a mesma para todas as frequências, pode ser obtida usando a equação :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (13)$$

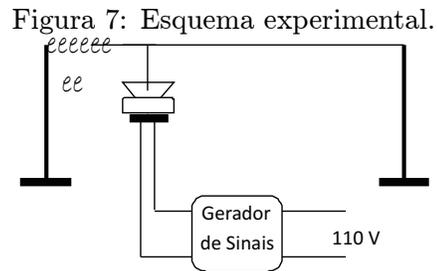
onde  $T$  é a força que traciona a corda (fio) e  $\mu$  é a densidade linear da corda (fio). A Figura 6 abaixo representa os modos de vibração de uma corda de comprimento  $L$ , fixa em ambas as extremidades.

Figura 6: Diferentes modos de vibração de uma corda com extremidades fixas.



### 7.4 Procedimento experimental

Para atingir os objetivos desta experiência, será utilizada uma experiência conforme o esquema representado na Figura 7. As frequências de ressonâncias serão determinadas variando lentamente a frequência no gerador de sinais e observando o movimento da corda.



## 7.5 Folha de manipulação - Ondas Estacionárias

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

1. Observe a formação de ondas estacionárias no fio e determine a frequência de ressonância dos harmônicos correspondentes, preenchendo a Tabela 5 abaixo. A ressonância pode ser encontrada variando-se lentamente a frequência de vibração da corda no gerador de sinais.
2. Meça o comprimento entre os nós externos da corda:  

$$L = \dots \pm \dots \quad (14)$$
3. Faça um gráfico de  $f$  em função de  $n$ . Por que é esperado que esse gráfico tenha um comportamento linear?
4. A partir da Tabela 5 acima e do valor de  $L$ , use o método dos mínimos quadrados para calcular a velocidade de propagação da onda:

$$v = \dots \pm \dots \quad (15)$$

5. Meça na balança a massa presa na extremidade da corda. Determine então a tração na corda, escrevendo-a como:.

$$T = \dots \pm \dots \quad (16)$$

6. A partir dos valores de  $T$  e  $v$ , obtenha a densidade linear da corda:

$$\mu_1 = \dots \pm \dots \quad (17)$$

7. A densidade linear da corda também pode ser obtida diretamente a partir dos valores do comprimento e da massa da corda. Meça com uma trena o comprimento da corda e com a balança sua massa. Determine então a densidade linear da corda: OBS: Não precisa utilizar a corda utilizada na experiência, basta utilizar uma corda feita do mesmo material!!!

$$\mu_2 = \dots \pm \dots \quad (18)$$

8. Os valores de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  concordam dentro da margem de erro do experimento?
9. Que efeito um aumento da tensão na corda tem sobre a frequência de ressonância de um dado harmônico  $n$ ? e sobre o comprimento de onda?

Tabela 5: Dados experimentais de  $n$  e  $f$ .

$i$	$n$	$f(\text{Hz})$	$X^2$	$XY$	$a + b \times X$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						$a = \dots \pm \dots$
4						
5						$b = \dots \pm \dots$
$\Sigma_{i=1}^N$						

## 8 Velocidade do Som Usando o Tubo de Kundt

### 8.1 Objetivo

Investigar a formação de padrões de ondas sonoras estacionárias e determinar a velocidade do som em um cilindro metálico usando um tubo de Kundt.

### 8.2 Material utilizado

⊗ Tubo de vidro; ⊗ bolinhas de isopor; ⊗ Um cilindro metálico de latão e um de aço; ⊗ Régua graduada;

### 8.3 Teoria

Ao emitirmos ondas sonoras na extremidade de um tubo contendo ar o qual está fechado na extremidade oposta, podemos obter, para certos comprimentos do tubo de ar, padrões de ondas estacionárias identificados por um máximo na intensidade do som produzido pelo gerador de vibrações. Nesse caso, teremos o fenômeno de ressonância, a qual ocorrerá quando as ondas sonoras que entram em uma das extremidades e as que so refletidas na extremidade oposta interferirem de modo construtivo. Na ressonância, a frequência  $f$  do gerador coincide com uma das frequências naturais de vibração da coluna de ar no tubo.

Fixando uma dada frequência para as ondas sonoras em um tubo fechado em uma das extremidades, as ressonâncias ocorrerão para os comprimentos:

$$L_n = \frac{\lambda}{4}n, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (19)$$

Nesta equação,  $L_n$  representa o comprimento do tubo para o harmônico  $n$  e  $\lambda$  o comprimento de onda da onda sonora. Note que no tubo fechado em uma das extremidades, somente os harmônicos ímpares estão presentes.

A onda sonora será gerada por fricção de um cilindro metálico contendo um disco em sua extremidade que transmite a onda sonora

para o ar dentro do tubo de vidro (Kundt). Ao atritarmos o cilindro metálico geramos uma onda sonora com frequência bem definida que chamaremos de  $f$ . Veja a figura 8 Observe que caso a velocidade do som no ar seja conhecida e o comprimento das ondas estacionárias no tubo de vidro, podemos determinar a velocidade do som no cilindro metálico. Ou ainda, conhecida a velocidade do som no cilindro metálico podemos determinar a velocidade do som no gás (no nosso caso, ar) que enche o tubo. A prova disso é simples: primeiro consideremos que a velocidade do som no cilindro metálico seja  $v_m$ , assim

$$v_m = f \times \lambda_m, \quad (20)$$

onde  $f$  é a frequência e  $\lambda_m$  é o comprimento de onda no cilindro metálico. Como vemos na figura 8, temos que  $\lambda_c = 160\text{cm}$ . Analogamente, a velocidade do som no ar  $v_{gas}$  é

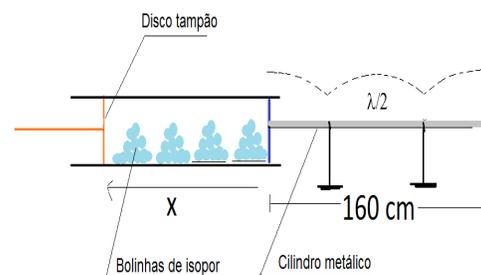
$$v_{gas} = f \times \lambda_{gas}, \quad (21)$$

onde  $f$  a frequência que não muda ao passar do metal para o ar, e  $\lambda_{gas}$  é o comprimento de onda no ar. Eliminando a frequência nestas duas equações, obtemos a velocidade do som no cilindro metálico em termos da velocidade do som no ar:

$$v_m = v_{gas} \frac{\lambda_m}{\lambda_{gas}}. \quad (22)$$

Portanto, assumindo que o valor de  $v_{gas}$  seja conhecido podemos determinar o valor de  $v_m$ .

Figura 8: Esquema Experimental



### 8.4 Folha de manipulação : Velocidade do Som usando um Tubo de Kundt.

Data: ..... Turma:.....  
 Grupo  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....

### 8.5 Procedimento experimental

A ressonância será produzida num tubo de vidro contendo ar e cujo comprimento da coluna de ar pode ser ajustado movendo-se o disco tampão(veja o esquema experimental na Figura 8). Espalhamos pelo tubo de vidro pequenas bolinhas de isopor secas. O cilindro metálico é fixado firmemente em dois pontos situados a 40 cm de cada extremidade. Para gerar a vibração é necessário atritar com um pano contendo pó de broca no segmento médio do cilindro metálico. Fazemos vibrar o cilindro de metal e vamos movendo o disco no outro extremo do tubo de vidro pouco a pouco, até observarmos uma disposição bem definida (situação de ressonância) dos planos de bolinhas. Medindo a distância entre os nós da onda estacionária formada, definidos pela ausência vibração das bolinhas, determinamos o comprimento de onda no ar da oscilação gerada pelo cilindro metálico.

1. Anote o comprimento de onda da onda sonora gerada no cilindro metálico:

$$\lambda_m = \dots \pm \dots \quad (23)$$

2. Após colocar o cilindro metálico para vibrar friccionando-o com o pano, observe a formação de padrões de ressonância no interior do tubo de vidro à medida que o comprimento da coluna de ar é variado. Preencha então a Tabela 6 abaixo:

3. Construa um gráfico do comprimento  $X$  (comprimento da coluna de ar) em função do modo de vibração  $n$ . Por que é esperado que esse gráfico tenha um comportamento linear?

4. A partir da tabela 1, use o método dos mínimos quadrados para obter o comprimento de onda  $\lambda_{gas} \pm \Delta\lambda_{gas}$ ?

$$\lambda_{gas} = \dots \pm \dots \quad (24)$$

5. Calcule a velocidade  $v_m$  do som no cilindro usando que  $v_{gas} = (340 \pm 2)\text{ms}^{-1}$ :

$$v_m = \dots \pm \dots \quad (25)$$

Tabela 6: Dados experimentais de  $X$  e  $n$ .

$i$	$n$	$X(\text{cm})$	$n^2$	$nX$	$a + b \times x$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						$a = \dots \pm \dots$
4						
5						$b = \dots \pm \dots$
$\Sigma_{i=1}^N$						

## 9 Reflexão e refração da luz

### 9.1 Objetivo

Constatação das leis da reflexão e da refração da luz, Determinação do índice de refração de um material e do ângulo limite.

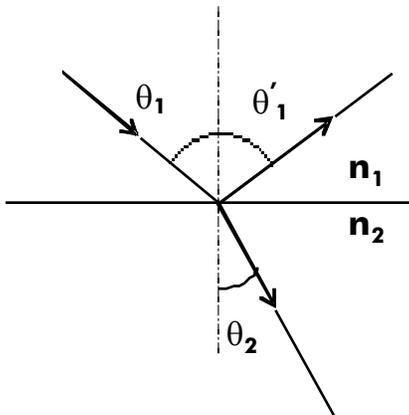
### 9.2 Material utilizado

⊙ Banco óptico; ⊙ Tábua de ângulos; ⊙ Tela de fendas; ⊙ Lente cilíndrica; ⊙ Tela opaca; ⊙ Fonte de luz; ⊙ Base para as telas; ⊙ Máscara; ⊙ Lente convergente.

### 9.3 Teoria

Quando um feixe de luz incide sobre a superfície de separação entre dois meios, parte dele é refletida e a outra parte é desviada (refratada) ao penetrar no segundo meio (Fig. 9).

Figura 9: Reflexão e refração da luz



Onde

- $n_1$  = índice de refração no meio 1;
- $n_2$  = índice de refração no meio 2;
- $\theta_1$  = ângulo de incidência;
- $\theta_2$  = ângulo de refração e
- $\theta'_1$  = ângulo de reflexão.

As leis da reflexão e da refração são as seguintes:

- Os raios refletido e refratado estão contidos no plano formado pelo raio incidente com a normal à superfície no ponto de incidência;
- reflexão:  $\theta_1 = \theta'_1$ ; e
- refração :  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .

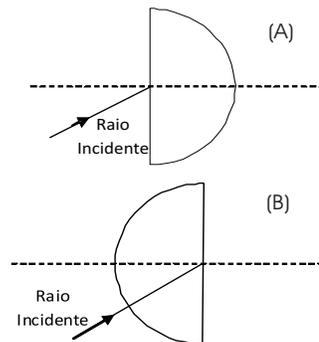
Quando o meio 1 é mais refringente de que o meio 2 ( $n_1 > n_2$ ), o ângulo de refração é maior que o de incidência. À medida que  $\theta_1$  aumenta, o raio refratado afasta-se da normal, até sair tangente à superfície ( $\theta_2 = 90^\circ$ ), e temos

$$n_1 \sin \phi_L = n_2 \quad (26)$$

Onde  $\theta_L$  é o ângulo limite. A partir deste ângulo somente ocorre reflexão.

Complete o desenho mostrando abaixo desenhando o que ocorre com os raios incidentes, refletido e refratado, no caso em que a luz incide pela parte reta (Figura 10.(a)) e pela parte curva (Figura 10.(b)) de uma lente cilíndrica.

Figura 10: Reflexão e refração da luz



### 9.4 Procedimento experimental - Leis da Reflexão e Refração

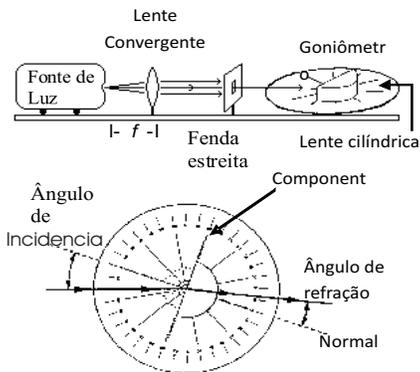
Data: ..... Turma:.....  
 Grupo  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....

Vamos dividir esta experiência em duas partes, 1ª PARTE: constatação das leis da reflexão e refração e a determinação do índice de refração da lente; e 2ª PARTE: determinação do ângulo limite.

#### 1ª PARTE : Reflexão e Refração da Luz

1. Monte o equipamento conforme mostrado na Figura 11. Alinhe a superfície plana da lente cilíndrica com a linha rotulada *component*. A lente estará alinhada quando as linhas radiais da tábua de ângulos (goniômetro) ficarem perpendiculares à superfície curva da lente. Ajuste o sistema de tal modo que um único raio de luz passe diretamente através do centro do goniômetro. Nesta situação o raio luminoso emerge perpendicularmente à superfície curva da lente.

Figura 11: Reflexão e refração da luz



2. Fazendo a luz incidir na superfície plana da lente e sem perturbar o alinhamento da

mesma, gire o goniômetro a fim de observar o raio refratado para vários ângulos do raio incidente.

3. Complete na tabela os ângulos de reflexão e refração, correspondentes aos ângulos de incidência indicados.

$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\theta'_1(^{\circ})$	$\text{sen}\theta_1$	$\text{sen}\theta_2$
0				
10				
20				
30				
40				
50				
60				
70				
80				

Obs: Durante as medidas faça uso da lei de reflexão da luz para conferir o alinhamento da lente.

4. Faa um gráfico  $\text{sen}\theta_1$  x  $\text{sen}\theta_2$  em papel milimetrado. Por que é esperado que esse gráfico tenha um comportamento linear?
5. Considere o índice de refração do ar igual a 1,00 e a partir dos dados na Tabela 7, use o método dos mínimos quadrados para encontrar o índice de refração da lente cilíndrica ( $n_L$ ).

$$n_L = \dots \pm \dots \quad (27)$$

**2ª PARTE: Reflexão Interna ou reflexão Total da Luz**

6. Sem perturbar o alinhamento feito anteriormente, posicione a lente cilíndrica de modo que a superfície curva da mesma esteja voltada para o feixe incidente. Use a tela opaca (anteparo) para detectar os raios refratados mais fracos.
7. Procure a situação em que ocorre reflexão total da luz e meça o ângulo limite  $\theta_L$ .
8. O que você entende por ângulo limite?
9. Calcule o índice de refração da lente cilíndrica a partir de  $\theta_L$  encontrado acima. OBS: faça a propagação de erros e encontre esse resultado como:

$$n_L = \dots \pm \dots \quad (28)$$

Tabela 7: Dados experimentais de  $\sin \theta_1$  e  $\sin \theta_2$  para uso no MMQ.

$i$	$\sin \theta_1$	$\sin \theta_2$	$X^2$	$XY$	$a + b \times X$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						$a = \dots \pm \dots$
4						
5						$b = \dots \pm \dots$
6						
$\Sigma_{i=1}^N$						

10. Pode existir reflexão total quando a luz passa de um meio menos refringente para um meio mais refringente ( $n_1 < n_2$ )? Justifique.
11. Observe que  $\theta_L$  não é o mesmo para cada cor do raio refratado. Explique.

## 10 Interferência e Difração

### 10.1 Objetivo

- Análise, e interpretação teórica do fenômeno de interferência e difração ;
- Observação do fenômeno de interferência e difração ;
- Determinação experimental da largura de uma fenda, usando o padrão de difração obtido;
- Determinação experimental da distância entre fendas, usando o padrão de interferência obtido;
- Constatação da importância da coerência da fonte de luz;
- Observação do fenômeno da rede de difração ;
- Observação do princípio de Babinet.;
- Observação da difração e interferência de um fio fino (fio de cabelo).

### 10.2 Material utilizado

- 1 luz branca e 1 monocromática (laser),
- conjunto de slides com fendas,
- 1 trena de 2 metros,
- 1 anteparo com suporte ,
- 1 porta slide com suporte,
- 1 fio fino de metal.

### 10.3 Teoria

Apresentaremos a seguir um breve resumo da parte teórica envolvida nas experiências de difração e interferência. Uma descrição mais detalhada sobre o assunto pode ser encontrada no livro texto do curso.

#### PARTE I: Difração :

Suponha uma fenda de largura  $a$ , iluminada por um feixe de luz de fonte monocromática

de comprimento de onda  $\lambda$ . Pode ser demonstrado que a distribuição da intensidade da luz sobre um ponto do anteparo, localizado pelo ângulo  $\theta$ , é dada por:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (29)$$

onde

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (30)$$

Note que  $I_0$  é a intensidade central no anteparo. Segundo a equação 29, as posições sobre o anteparo em que a intensidade da luz será zero estão associadas a condição :

$$\sin \alpha = 0 \implies \alpha = m\pi, (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (31)$$

Esta mesma condição pode ser expressa como:

$$a \sin \theta = m\lambda, (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (32)$$

Os máximos secundários estão localizados a aproximadamente meia distância entre dois mínimos consecutivos, ou seja:

$$\alpha = (m + 1/2)\pi \quad (33)$$

A Figura 12.(a) mostra o gráfico da figura de difração de Fraunhofer, quando atravessamos uma única fenda com um laser de hélio-neônio ( $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ) e projetamos a luz difratada sobre um anteparo colocado a uma distância  $D = 2,5 \text{ m}$  e largura de  $a = 0.10 \text{ mm}$ . O esquema de montagem está desenhado a seguir.

#### Questões sobre a teoria de difração :

1. Calcule, a partir da equação 29, para o ângulo  $\theta = 0$ , o valor da intensidade da luz e o valor de  $m$  correspondente. Qual a posição correspondente no anteparo? (fazer em casa)

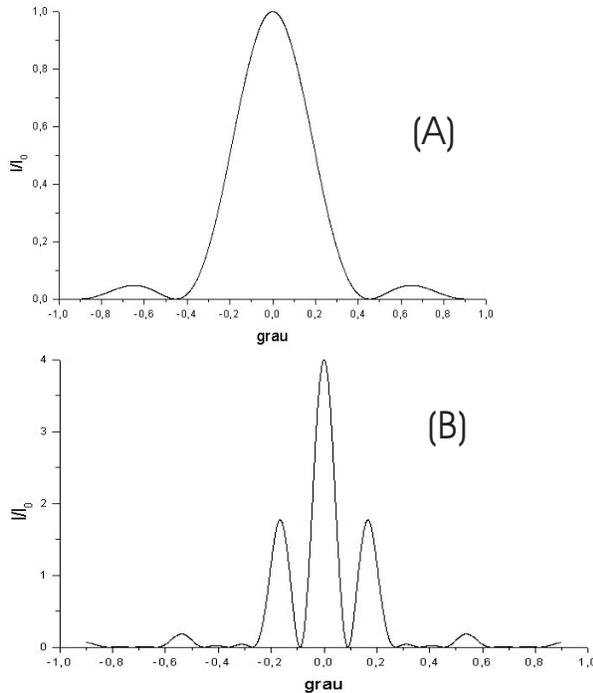


Figura 12: (a) Padrão de difração para fendas com  $N = 1$ . (b) Padrão de difração para fendas com  $N = 2$ .

- Indique no eixo das abscissas das Figuras 12.(a) e 12.(b), as posições correspondentes em distância a  $m = 1, 2, 3,$  e os valores correspondentes de  $\alpha$ . (fazer em casa)

**PARTE II: Interferência:**

Se utilizarmos mais de uma fenda, o fenômeno observado será o de interferência. Quando usamos, em um mesmo slide,  $N$  fendas ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ), separadas por uma distância  $d$ , a intensidade da luz será dada por:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 \quad (34)$$

onde

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad (35)$$

Note que para  $N = 1$  recairemos na mesma expressão do fenômeno da difração .

De acordo com a equação 34, a intensidade da franja central no anteparo é  $N^2 I_0$ , ou seja, a intensidade central com  $N$  fendas é  $N^2$  vezes

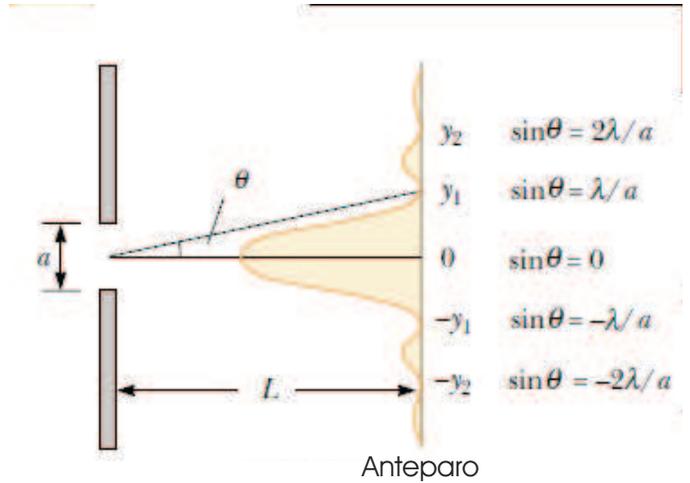


Figura 13: Esquema experimental.

mais intensa do que a de uma única fenda. Em compensação , a largura dessa franja central é bem mais estreita, como veremos a seguir, portanto a franja é bem mais definida em termos de posição .

- Mostre, a partir da equação 34, que para  $N = 2$  a distribuição de intensidade da luz sobre o anteparo é dada pelo fator  $(\cos \beta^2)$  modulado pelo fator de difração . (para fazer em casa)

$$I = \dots\dots\dots (\cos \beta)^2. \quad (36)$$

A distribuição de intensidade de luz sobre um anteparo, colocado a 2,5 m do slide, quando duas de suas fendas são atravessadas por um laser de hélio-neônio, estão representadas nas Figuras 14.(a) com  $a = 0.10$  mm e  $d = 0.20$  mm; e 14.(b) com  $a = 0.10$  mm e  $d = 0.40$  mm.

- Indique no eixo das abscissas das Figuras 14.(a) e 14.(b), as posições em distância correspondentes a  $\alpha = \pi, 2\pi, 3\pi\dots$ ; e  $\beta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2\dots$  .
- A Figura 15 mostra o padrão de interferência obtido para as mesmas condições indicadas para a Figura 14.(b), quando aumentamos o número de fendas para  $N = 3$ .

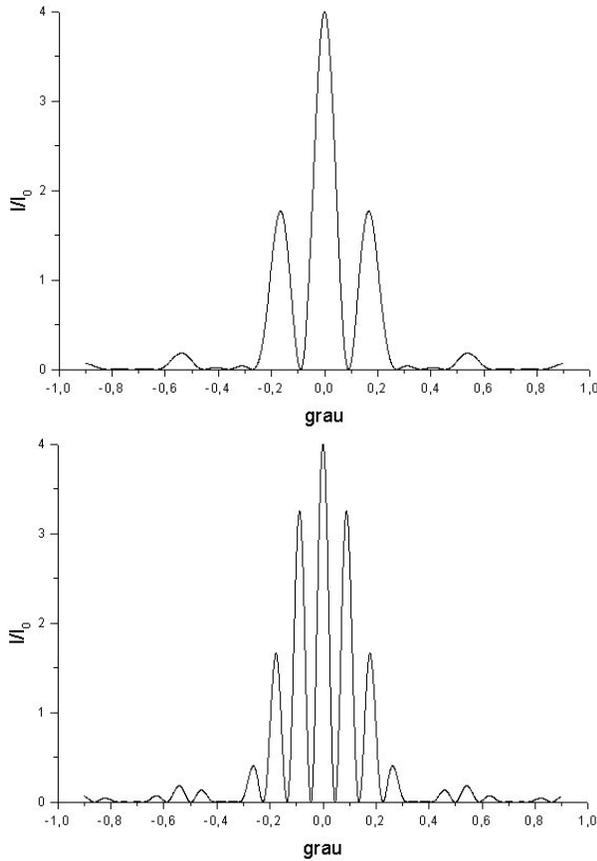


Figura 14: Padrões de difração para  $N = 2$ . As larguras das fendas estão indicadas no texto.

Note que entre dois máximos de 1<sup>a</sup> ordem aparece um máximo de 2<sup>a</sup> ordem. A partir do número de máximos de 2<sup>a</sup> ordem ( $N_2$ ), entre dois máximos consecutivos de 1<sup>a</sup> ordem, podemos determinar o número de fendas ( $N$ ) pela relação :

$$N = N_2 + 2. \quad (37)$$

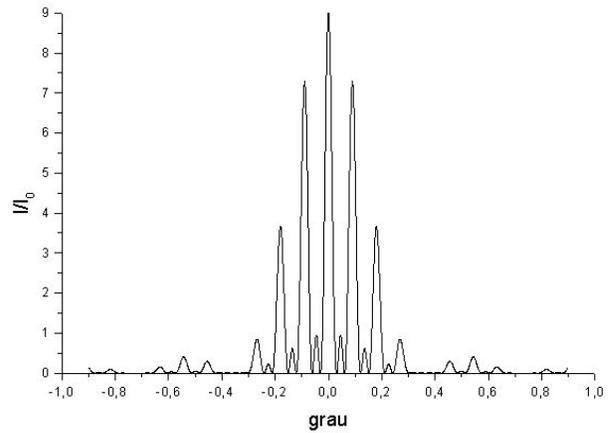


Figura 15: Padrões de difração para um conjunto com  $N = 3$  fendas.

## 10.4 Procedimento Experimental: Interferência e Difração

Data: ..... Turma:.....  
Grupo Nome:.....  
Nome:.....  
Nome:.....  
Nome:.....

**Atenção : Nunca olhe diretamente para o feixe de laser, ele pode ferir sua retina e deixar uma região cega. As reflexões de luz do laser em superfícies de vidro (ou em superfícies metálicas muito polidas) podem também ser perigosas.**

### 1. Difração por uma fenda estreita

Observe, contraluz, que em cada slide (1,2 e 3) existem 4 fendas simples ( $N=1$ ) com larguras distintas. Ilumine com laser cada uma dessas fendas e observe o padrão gerado, ou seja, a figura formada no anteparo. Observe o que ocorre com o padrão, em função da largura da fenda, iluminando estas fendas uma a uma.

Escolha uma fenda de um dos slides 1, 2 ou 3 e a partir das medidas relativas ao padrão gerado determine a largura da fenda.

$$a = \dots\dots\dots (38)$$

### 2. Difração por um orifício circular (slides 14 e 15)

Observe o padrão gerado quando você ilumina os slides 14 e 15. A análise teórica mostra que o primeiro mínimo do padrão de difração por orifício circular de diâmetro  $\rho$ , é dado por:

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{\rho} \quad (39)$$

Meça no padrão gerado para o slide 14 ou 15 o raio da figura formada, a distância entre o slide e o anteparo e determine o diâmetro do orifício do slide escolhido.

$$\rho = \dots\dots\dots (40)$$

### 3. Interferência por duas fendas (slides 4 e 6)

Observe contra luz que os slides 4 e 6 contêm 3 pares ( $N = 2$ ) de fendas. Projete sobre o anteparo o padrão de interferência para cada par. Observe que, para o slide 4, o padrão modulador de difração permanece constante ( $a = \text{constante}$ ). Observe agora o padrão produzido pelo slide 6.

Encontre a largura e a distância entre as fendas do 3º conjunto do slide 4 ou 6.

$$a = \dots\dots\dots (41)$$

$$d = \dots\dots\dots (42)$$

### 4. Interferência por fendas múltiplas (slides 9)

Conforme você pode verificar olhando contra luz, o número de fendas usado no slide 9 é variado. Observe as várias figuras obtidas com este slide. Indique, em ordem crescente, qual o número de fendas para cada conjunto delas, contidas neste slide.

Como você pode obter, a partir dos padrões gerados pelo slide 9, o número de fendas iluminadas simultaneamente?

### 5. Difração com luz branca - Coerência Espacial

Na interferência de fenda-dupla, as franjas aparecem no anteparo devido a coerência de fase entre as frentes de onda que incidem nas fendas. Essa coerência é assegurada pelo fato da fonte de luz ser um laser. Para difração, a coerência de fase em todos os pontos na seção do orifício também é assegurada pelo uso do feixe do laser. Uma luz comum não teria essa

coerência de fase nos pontos da frente de onda. Porém, se delimitamos a uma parte pequena da frente de onda, por meio de um orifício, ou de uma fenda estreita, ou de uma fenda-dupla, a incoerência dentro dessa parte da superfície pode ser minimizada de tal forma que podemos obter difração e interferência.

Ligue a fonte de luz branca, e para obter melhores resultados, use o slide de fendas múltiplas funcionando como uma rede simples de difração. Devido a pouca intensidade de luz utilizada, não será mais possível projetar a figura em um anteparo. Posicione o slide de fendas múltiplas bem junto do olho, com as fendas no mesmo sentido do filamento da lâmpada. Observe as imagens virtuais das fendas que são projetadas na retina como imagens reais. O aparecimento das imagens múltiplas do filamento corresponde ao resultado bem sucedido da difração.

Qual é a importância da coerência do feixe incidente para a formação de um padrão de interferência?

## 6. O Princípio Babinet

Um feixe de laser incide diretamente no anteparo e deixa uma região circular iluminada com raio  $R_0$ . A distribuição de intensidade  $I_0(\theta)$  onde não é nula é considerada a imagem do laser de acordo com a óptica geométrica, e a região onde a intensidade é nula é considerada a sombra do laser com raio maior que  $R_0$  de acordo com a óptica geométrica. Sabemos que interceptando o feixe por um plano opaco com um pequeno orifício no meio por onde passa o laser produz uma difração no anteparo com a distribuição de intensidade  $I_1(\theta)$  de acordo com a óptica física. O princípio Babinet afirma que o complemento desta

situação também é verdadeiro. Isto é, um disco opaco centralizado (que é o complemento geométrico do orifício) interceptando uma pequena parte do feixe produz uma difração no anteparo e tem uma distribuição de intensidade  $|I_0(\theta) - I_1(\theta)|$  que é idêntica a anterior na região da sombra geométrica.

- 7. Difração por um fio** Pode confirmar também o princípio Babinet colocando um fio fino opaco com raio  $r$  transversal a direção da propagação do feixe de laser com seção circular de raio  $R > r$ . O fio divide a seção do feixe em duas partes iguais de meia-lua. Uma parte na esquerda e outra parte na direita, separadas por  $d = (R + r)$  formando uma fenda-dupla. Além de haver a difração do fio opaco idêntica a difração de uma fenda da mesma largura  $r$ , há franjas nos envoltórios da difração devido a interferência da fenda-dupla. Faça uma observação das estruturas no anteparo bem atentamente e procure entender o princípio Babinet.

## 11 APÊNDICE I: Propagação de Erros

### 11.1 Algarismos Significativos

Em uma medida, os algarismos significativos são aqueles lidos com certeza do instrumento de medida mais um algarismo duvidoso. Esse algarismo duvidoso (o qual também é significativo) pode ser estimado pelo operador do instrumento (no caso de instrumentos analógicos) ou dado diretamente pelo instrumento (no caso de instrumentos digitais). Exemplos:

- $15,63 \text{ cm} \Rightarrow 4$  algarismos significativos
- $2,60 \text{ s} \Rightarrow 3$  algarismos significativos
- $0,34 \text{ cm} = 3,4 \text{ mm} \Rightarrow 2$  algarismos significativos

Note que zeros a esquerda (como no último exemplo acima) *não* são significativos, pois podem ser eliminados por uma transformação de unidades ou escrevendo a medida em notação científica.

### 11.2 Notação científica

A notação científica é bastante útil para explicitarmos o número de algarismos significativos de uma medida. Além disso, ela fornece uma representação adequada para números muito grandes ou números muito pequenos. Exemplos de representações em notação científica:

- $0,0040 \text{ cm} \Rightarrow 4,0 \times 10^{-3} \text{ cm}$
- $980,35 \text{ cm/s}^2 \Rightarrow 9,8035 \times 10^2 \text{ cm/s}^2$
- $0,00005 \text{ s} \Rightarrow 5 \times 10^{-5} \text{ s}$

Observe que a representação em notação científica constitui-se de um algarismo significativo antes da vírgula associado a uma potência de 10 conveniente.

### 11.3 Transformações de unidades

A regra geral da transformação de unidades é que se mantenha o número de algarismos significativos no processo de transformação de unidades. Exemplos:

- $0,043 \text{ m} \Rightarrow 4,3 \text{ cm}$
- $8,9 \text{ m/s} \Rightarrow 8,9 \times 3,6 \text{ km/h} = 32 \text{ km/h}$ .

### 11.4 Arredondamentos

Muitas vezes, ao realizarmos operações matemáticas com as medidas realizadas no laboratório, é necessário eliminar algarismos excedentes (não-significativos) através de arredondamentos de resultados. Nessa direção, a primeira regra básica é que devemos evitar arredondamentos intermediários, ou seja, arredondamentos devem ser realizados na etapa final dos cálculos, quando estivermos obtendo as quantidades físicas que representam o objetivo do experimento realizado. Quanto ao arredondamento em si, podemos fazê-lo adotando-se a seguinte regra:

- se o algarismo seguinte ao último que se quer manter encontra-se entre 000... e 499..., basta excluí-los.
- se o algarismo seguinte ao último que se quer manter encontra-se entre 500... e 999..., aumenta-se de uma unidade o último algarismo.

Exemplos: Nos casos abaixo, quer se manter como último algarismo aquele que está sublinhado (é uma notação usual sublinharmos o algarismo duvidoso de uma medida ou do resultado de uma operação matemática sobre uma medida):

- $\underline{8},350 = 8$
- $8,\underline{3}50 = 8,4$
- $8,3\underline{5}0 = 8,35$

## 11.5 Operações com algarismos significativos

Ao se efetuar cálculos com valores experimentais e constantes deve-se tomar cuidado para não expressar o resultado com um número de algarismos excessivo, o que não tem qualquer sentido. Neste sentido, ao realizarmos operações matemáticas com algarismos significativos, adotamos as regras abaixo.

### 11.5.1 Adição e Subtração

O resultado deve preservar a mesma quantidade de casas decimais da parcela com menos casas decimais.

- $(23,4 + 8 + 1,55) \text{ m} = \underline{32},95 \text{ m} = 33 \text{ m}$
- $(23,422 - 8,00) \text{ m} = 15,4\underline{22} \text{ m} = 15,42 \text{ m}$

### 11.5.2 Multiplicação e divisão

O resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que a parcela com menos algarismos significativos.

- $5,541 \times 2,0 = \underline{11},082 = 11$
- $0,452 \text{ A} \times 2671 \Omega = 1,21 \times 10^3 \text{ V}$
- $63,72 \text{ cm}/23,1 \text{ s} = 2,76 \text{ cm/s}$

### 11.5.3 Funções transcendentais

O resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que o argumento da função.

- $\sin 50^\circ = 0,7\underline{66044} = 0,77 = 7,7 \times 10^{-1}$
- $\ln 101 = 4,6\underline{151} = 4,62$

## 12 Introdução à Teoria de Erros

Resultados de procedimentos experimentais devem ser representados de modo geral como

$$M = (m \pm \Delta m) \text{ unidade}, \quad (43)$$

onde  $M$  é a grandeza física considerada,  $m$  é o valor numérico encontrado para essa grandeza

(expresso com o número correto de algarismos significativos) e  $\Delta m$  é a incerteza (ou erro experimental) associada ao procedimento experimental realizado.

### 12.1 Incerteza (ou erro)

A incerteza (ou erro) de um resultado experimental deve ter no máximo 2 algarismos significativos, podendo ter apenas 1 único algarismo. O último algarismo significativo do valor do mensurando é determinado pelo último algarismo significativo da incerteza. Exemplos:

- $a = (6,57 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$
- $a = (6657 \pm 13) \times (10^{-3} \text{ m/s}^2)$

Pode-se expressar um valor sem explicitar-se a incerteza associada. Nestes casos está implícito que existe um limite de erro de no máximo 0,5 do último algarismo significativo. Por exemplo:  $d = 5,5 \times 10^2 \text{ km} \implies (5,50 \pm 0,05) \times 10^2 \text{ km}$ .

### 12.2 Classificação dos erros

Quanto à sua origem e sua maneira de atuar no experimento, os erros experimentais classificam-se em

- *Erro sistemático:* Afeta o experimento sempre da mesma maneira, deslocando o valor da medida em um mesmo sentido. A presença de um erro sistemático provocará ou um aumento ou uma diminuição no valor obtido de todas as medidas realizadas. Exemplo: Erro na calibração de uma balança.
- *Erro de escala:* Este erro ocorre devido ao limite natural de precisão de qualquer instrumento de medida, ou seja, está associado ao *limite de erro de calibração* do instrumento. O erro de escala afeta qualquer medida, visto que qualquer instrumento utilizado para realizar medidas terá um limite de precisão. Exemplo: Uma régua graduada em milímetros não tem

precisão para estimar comprimentos em micrômetros ( $1 \mu\text{m} = 10^{-3} \text{mm}$ ), pois possui associado a ela um erro bem maior que  $1 \mu\text{m}$ .

- **Erro aleatório:** Afeta o experimento de forma imprevisível, ora aumentando o valor obtido para uma medida ora diminuindo seu resultado. Exemplo: Alterações em medidas devido a flutuações na rede elétrica, a vibrações no aparato experimental, a variações de temperatura, etc.

### 12.3 Estimativa de incertezas

Não podemos eliminar completamente a presença de incertezas em procedimentos experimentais. No entanto, a teoria de erros nos permite fazer uma estimativas dos erros cometidos no experimento de modo a podermos avaliar a precisão e a qualidade do experimento realizado. Assumindo que os erros ocorrem devido a fontes independentes de incertezas no experimento, podemos tomar como erro total de uma medida a soma dos erros sistemáticos, de escalas e aleatórios. O tratamento para cada tipo de erro ocorre como abaixo.

- **Erros sistemáticos:** Quanto aos erros sistemáticos, suspeitando-se que sua presença é relevante para os resultados obtidos, tentamos identificar sua origem e eliminá-lo do experimento. Não estimaremos aqui esse tipo de erro.

Dessa forma, desprezando erros sistemáticos, exprimiríamos o erro total sobre um resultado experimental como

$$\Delta m = \sigma_e + \sigma_a \quad (44)$$

onde  $\sigma_e$  denota o erro de escala associado á medida e  $\sigma_a$  seu o erro aleatório provável. Esses erros podem ser estimados da seguinte maneira:

- **Erro de escala em instrumentos analógicos:** O limite de erro de calibração

de um instrumento analógico, em geral, coincide com a menor divisão indicada pelo instrumento. O erro de escala pode ser adotado como metade do limite de erro de calibração, ou seja, metade da menor divisão da escala

$$\sigma_e = \pm \frac{\text{Menor Divisão da Escala}}{2} = \pm \frac{\text{MDE}}{2}. \quad (45)$$

Exemplo: Para o caso de uma régua graduada em milímetros, temos  $\sigma_e = \pm 0,5 \text{mm}$ .

- **Erro de escala em instrumentos digitais:** Neste caso o manual do instrumento fornece o erro de escala como sendo a exatidão ou acurácia do instrumento. Nos casos em que esta informação não esta disponível adota-se o erro de escala como sendo igual a uma unidade da menor divisão da escala (1 no último algarismo mostrado)

$$\sigma_e = \pm \text{Acurácia ou } \pm \text{Menor Divisão da Escala} \quad (46)$$

Exemplo 1. Para o caso de um cronômetro com precisão em milisegundos, temos  $\sigma_e = \pm 1 \text{ms}$ .

Exemplo 2. Para o caso de um multímetro digital cujo manual informa que na escala de 2 mA a acurácia é  $\pm 0,8\%$  da leitura + 3 dígitos: o dígito é uma unidade da menor divisão mostrada na escala considerada, que no caso é 0,001 mA ( $1\mu\text{A}$ ); se a leitura no multímetro é 1,101 mA

$$\Rightarrow 0,8\% + 3 \text{ dígitos} = (0,008808 + 3 * 0,001) \text{mA} = 0,011808 \text{mA}$$

$$\sigma_e = \pm 0,01 \text{mA}. \quad (47)$$

- **Estimativa do erro aleatório provável:** Para o cálculo do erro aleatório provável fazemos um conjunto de  $N$  medidas da quantidade física e prosseguimos através dos seguintes passos:

1. Calcula-se o valor médio (valor mais provável de uma medida) através da média

aritmética dos valores  $x_i$  medidos

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (48)$$

2. Calcula-se o desvio  $\Delta x_i$  de cada medida em relação à média

$$\Delta x_i = x_i - x_m. \quad (49)$$

3. Calcula-se o desvio padrão  $\sigma$ , o qual é uma das quantidades em estatística para indicar a tendência das medidas de se distribuírem em torno do seu valor mais provável. O valor de  $\sigma$  nos fornece uma idéia da dispersão das medidas em relação a seu valor mais provável, sendo dado por

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N-1}}. \quad (50)$$

4. Finalmente, o erro aleatório será dado calculando-se o desvio padrão da média

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (51)$$

## 12.4 Propagação de Erros

Suponha que se deseja determinar o volume ( $V$ ) de um pequeno cilindro tendo a disposição um paquímetro. Podemos determinar os valores do diâmetro ( $D$ ) e da altura ( $H$ ) do cilindro pelo uso direto do instrumento de medida a disposição, no caso o paquímetro. Já o volume do cilindro podemos determinar pela expressão  $V = \frac{\pi}{4} D^2 \times H$ . Neste caso, como ficam as incertezas associadas aos valores encontrados para as grandezas citadas acima? Uma vez que os valores de  $D$  e  $H$  foram determinados diretamente pelo uso do instrumento de medida, no caso o paquímetro, podemos considerar que a incerteza nos valores medidos como sendo a precisão do paquímetro fornecida pelo fabricante. E como fica a incerteza do volume? Nesse caso, a incerteza do volume deverá ser determinada por **propagação de erros**.

No caso mais geral, é necessário determinar o valor de uma grandeza  $w$  que é função de uma

ou mais grandezas físicas experimentais. Ao longo dessa seção  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam variáveis experimentais cada um com suas respectivas incertezas

$$\begin{aligned} x &\pm \sigma_x \\ y &\pm \sigma_y \\ z &\pm \sigma_z \end{aligned}$$

O objetivo dessa seção é descrever como se *propagam os erros* de cada variável para determinar o erro em  $w$ . Os detalhes que levam a *equação de propagação de erros* não serão apresentados aqui. Apesar disso, para sua validade, é importante observar durante as medidas que as variáveis ( $x, y$  e  $z$ ) **não sejam correlacionadas**. Isso significa que a medida de uma dessas grandezas não deve trazer informação *a priori* de quanto deve ser o valor das outras 2 grandezas. Nessa condição, a equação de propagação de erros é

$$\sigma_w^2 \simeq \sigma_x^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \sigma_z^2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \dots \quad (52)$$

Vejamos como a equação acima é aplicada em diversos casos. Nos casos a seguir,  $a$  e  $b$  são constantes.

## 12.5 Soma (Subtração) por uma constante

$$w = x + a$$

Nesse caso temos apenas uma variável e a eq.(52) se reduz a

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2$$

já que  $\frac{\partial w}{\partial x} = 1$ .

## 12.6 Produto por uma constante

$$w = ax$$

Novamente é uma função de 1 variável e a eq. (52) fica

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 a^2 \Rightarrow \sigma_w = |a| \sigma_x$$

onde  $\frac{\partial w}{\partial x} = a$ .

## 12.7 Produto de 2 variáveis

$$w = axy \quad (53)$$

Esse é o primeiro exemplo que envolve 2 variáveis. A eq. (52) fica

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2(ay)^2 + \sigma_y^2(ax)^2$$

onde  $\frac{\partial w}{\partial x} = ay$  e  $\frac{\partial w}{\partial y} = ax$ . A equação acima ainda pode ser escrita de uma forma mais simétrica se dividirmos ambos os lados por  $w^2$

$$\frac{\sigma_w^2}{w^2} = \frac{\sigma_x^2(ay)^2 + \sigma_y^2(ax)^2}{(axy)^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$$

em que no termo a direita foi usado a eq. (53). No final temos

$$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

Como seria a incerteza se  $w$  fosse o produto de 3 variáveis (i.e.,  $w = xyz$ )? Fica

$$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2$$

## 12.8 Potência

$$w = ax^b$$

Nesse caso a derivada parcial em  $x$  é

$$\frac{\partial w}{\partial x} = abx^{b-1} = \underbrace{ax^b}_w bx^{-1} = \frac{bw}{x}$$

e a eq. (52) fica

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{bw}{x}\right)^2$$

que pode ser reescrito como

$$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right) = |b| \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)$$

## 12.9 Exponencial

$$w = ae^{bx}$$

A derivada parcial em  $x$  fica

$$\frac{\partial w}{\partial x} = bae^{bx} = bw$$

e  $\sigma_w$  é dado por

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 (bw)^2 \Rightarrow \frac{\sigma_w}{w} = \frac{\sigma_x}{|b|}$$

## 12.10 Logaritmo

$$w = a \ln(bx)$$

A derivada parcial em  $x$  fica

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{ab}{x}$$

e a eq.(52) fica

$$\sigma_w = \sigma_x \left(\frac{|ab|}{x}\right)$$

## 12.11 Cosseno

$$w = a \cos(bx)$$

A derivada com respeito a  $x$  é

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -a \text{sen}(bx)$$

e

$$\sigma_w = \sigma_x |ab| \text{sen}(bx)$$

Importante lembrar que nesse caso, como também para a função seno, a **incerteza deve ser calculada em radianos!**

## 12.12 Tabela de propagação de erros

A tabela a seguir sumariza as principais equações para a propagação de erros de acordo com a função .

função $w$	Erro em $w$ ( $\sigma_w$ )
$w = x + a$	$\sigma_w = \sigma_x$
$w = ax$	$\sigma_w =  a \sigma_x$
$w = axy$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = xyz$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2$
$w = ae^{bx}$	$\frac{\sigma_w}{w} = \frac{\sigma_x}{ b }$
$w = a\ln(bx)$	$\sigma_w = \sigma_x \left(\frac{ ab }{x}\right)$
$w = a\cos(bx)$	$\sigma_w = \sigma_x  ab \sin(bx)$
$w = a\sin(bx)$	$\sigma_w = \sigma_x  ab \cos(bx)$

Tabela 8: Tabela de propagação de erros para as funções mais comuns. Nas funções ,  $a$  e  $b$  são constantes.

## Referências

1. VUOLO, J. H., *Fundamentos da teoria dos Erros*, Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo (1995).
2. PIACENTINI J. J, GRANDI, B. C. S., HOFMANN, M. P., LIMA F. R. R., ZIMMERMANN E., *Introdução ao Laboratório de Física*, Ed. da UFSC, 2a. Edição Revisada, Florianópolis (2005).

## 13 APÊNDICE II: Método dos Mínimos Quadrados

### 13.1 Construção de gráficos

Um gráfico apresenta um conjunto, ou mais, de dados experimentais numa figura. O gráfico objetiva mostrar visualmente a dependência entre uma grandeza e um parâmetro medidos simultaneamente. Para isto o gráfico deve ter os elementos essenciais abaixo.

#### Título do gráfico

Informa quais dados e que dependência está sendo representada. Por exemplo, se quer-se estudar a dependência da velocidade com o tempo o título pode ser de ser de uma das formas abaixo.

- Gráfico: velocidade ( $v$ ) em função do tempo ( $t$ )
- Gráfico:  $v$  versus  $t$
- Gráfico:  $v(t)$

#### Títulos dos eixos

Especifica qual grandeza física o eixo representa e que unidade é utilizada na escala do eixo. O eixo vertical, das ordenadas, corresponde à grandeza que é especificada primeiro na título do gráfico, antes do “versus”, enquanto que o que vem depois é representado no eixo horizontal, das abcissas. Assim, por exemplo, quando se construir o gráfico de “ $v$  versus  $t$ ”, as velocidades devem ser lidas nas escala do eixo vertical e os tempos no eixo horizontal. No título do eixo deve-se utilizar um símbolo adequado para a grandeza enquanto que a unidade é informada em parêntesis ou com um separador “/” conforme os exemplos:

- $v$  ( $cm/s$ ) ou  $v$  ( $cm s^{-1}$ ) ou  $v / cm s^{-1}$
- $t$  ( $s$ ) ou  $t / s$

#### Escala dos eixos

Fornece a escala em que a grandeza é representada no eixo graduado. O

eixo possui uma graduação principal, podendo também possuir uma graduação secundária, sendo que apenas para a principal é colocado o texto de legenda da escala. As legendas da escala devem ser números redondos, preferencialmente, múltiplos de 2 ou 5.

#### Legenda do gráfico

Quando mais de um conjunto de pontos é representado num único gráfico, é necessário diferenciar os conjuntos de dados usando símbolos diferentes. A legenda é um quadro inserido no gráfico onde se coloca o símbolo ao lado de um texto curto que especifica qual conjunto de dados aquele símbolo representa.

- Atenção: É errado colocar os valores dos pontos experimentais como legendas nos eixos.

#### Estética

Um gráfico é uma figura, portanto, deve ser bem proporcionado e esteticamente agradável para facilitar sua observação e análise. Por exemplo, um gráfico achatado, assim como uma escala inadequada, dificulta a análise das dependências matemáticas.

Figura 1.

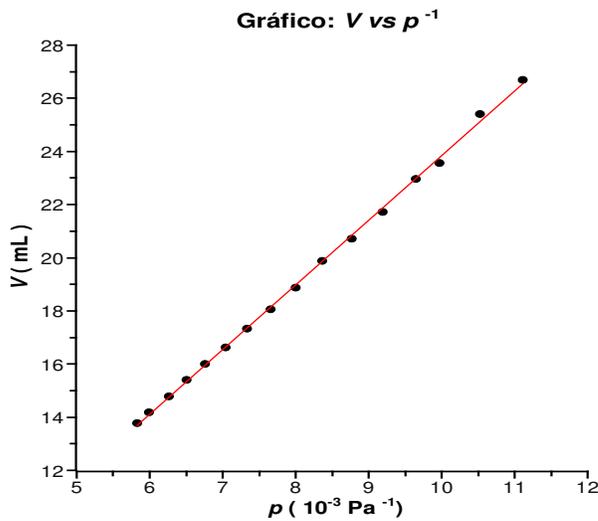


Figura 2.

## 14 Análise de gráficos: ajuste linear

Seja um experimento que fornece como resultado um conjunto de  $N$  pares de medidas  $(X_i, Y_i)$  que graficamente representados geram uma reta. O ajuste linear é a análise matemática de dados que apresentam uma dependência linear

$$Y = a + bX,$$

para a obtenção dos coeficientes linear  $a$  e do coeficiente angular  $b$ . Apresentaremos abaixo um exemplo que analisaremos primeiro pelo método da triangulação e depois pelo método dos mínimos quadrados.

### Método da triangulação

O método da triangulação consiste em traçar um triângulo retângulo com a hipotenusa apoiada sobre a melhor reta que passa pelos pontos experimentais. Esta melhor reta é escolhida “a olho” de modo que os pontos se distribuam de forma igual acima e abaixo da reta.

O coeficiente angular  $b$  é determinado pela razão

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_{final} - Y_{inicial}}{X_{final} - X_{inicial}}.$$

A figura 2 ilustra um exemplo de aplicação do método. Note que triângulo retângulo escolhido deve ser relativamente grande para diminuir a incerteza em  $\Delta F$  e  $\Delta L$ . O coeficiente linear  $a = 1 \text{ mN}$  foi encontrado extrapolando a reta até  $L = 0$ . Já o coeficiente angular foi calculado como

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{(50-20)\text{mN}}{94-18\text{mm}} = 0,53\text{Nm}^{-1}.$$

Chamamos a atenção para o fato de que tanto  $a$  como  $b$  podem ser positivos ou negativos e ambos possuem unidades. Também é importante notar que o coeficiente angular não é uma tangente pois possui unidade.

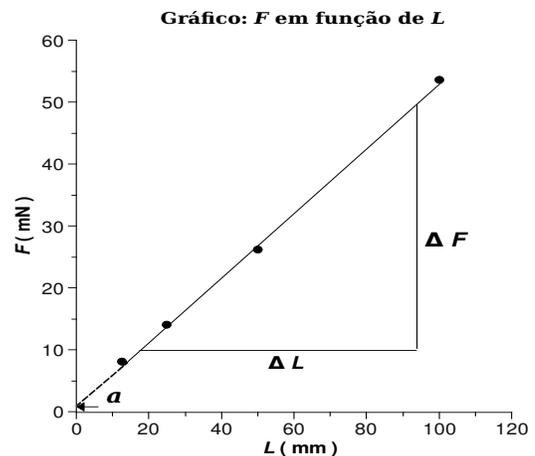


Figura 3.

### Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados resulta da minimização do quadrado da distância entre os valores experimentais de  $Y$  e os valores calculados como  $Y' = a + bX$ .

O coeficiente linear  $a$  e o coeficiente angular  $b$  são fornecidos pelas equações

$$a = \frac{\sum Y \sum X^2 - \sum X \sum XY}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}; e \quad (54)$$

$$b = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad (55)$$

As incertezas de  $a$  e  $b$  são, respectivamente,

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum X^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}} \quad e$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}},$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Delta Y)^2}{N-2},$$

e  $\Delta Y$  é a diferença entre os valores experimental e teórico

$$\Delta Y = Y - (a + bX).$$

Na Tabela 1 o método dos mínimos quadrados (MMQ) é aplicado aos dados do exemplo da Figura 3. A aplicação das fórmulas acima leva aos valores dos coeficientes da reta e suas incertezas mostrados na Tabela 2. A Tabela 2 mostra também os resultados obtidos com o método da triangulação e notamos que ambos os métodos concordam dentro da incerteza calculada.

Tabela 10: Resultado dos ajustes lineares pelos métodos da triangulação e dos mínimos quadrados.

	MMQ	Triangulação
$a$ ( mN )	$1,0 \pm 0,7$	1
$b$ ( Nm <sup>-1</sup> )	$0,52 \pm 0,01$	0,53

Tabela 9: Cálculo do método dos mínimos quadrados para dados do comprimento e da força magnética sobre um fio com  $I = 5$  A.

$n$	X L(mm)	Y F (mN)	$X^2$	XY	$(a + bX)$	$\Delta Y^2$
1	12,5	8,0	156,25	100	7,5	0,25
2	25,0	14,0	625	350	14	0,00
3	50,0	26,2	2500	1310	27	0,64
4	100	53,6	10000	5360	53	0,36
$\Sigma$	187,5	101,8	13281,25	7120		1,26